Roll No. .....

V – 141

B. Sc. (First Year) EXAMINATION, 2019

MATHEMATICS

Paper – III

VECTOR ANALYSIS AND GEOMETRY

Time : Three Hours

Maximum Marks : 40 (For Regular Students)

Minimum Pass Marks : 33%

Maximum Marks : 50 (For Private Students)

Minimum Pass Marks : 33%

नोट- सभी प्रश्न हल कीजिए। प्रश्न क्रमांक 1 अनिवार्य है।
Attempt *all* questions. Question no. 1 is compulsory.

1. किन्हीं **पाँच** प्रश्नों को हल कीजिए- 2×5/3×5
Attempt any *five* questions–

(i) यदि

$$\vec{r} = a\cos t\, i + a\sin t\, j + t\, k$$

तो $\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$ ज्ञात कीजिए।

If

$$\vec{r} = a\cos t\, i + a\sin t\, j + t\, k$$

then find $\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$.

(ii) सिद्ध कीजिए-

$$\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right]\cdot\left[\vec{a}'\,\vec{b}'\,\vec{c}'\right]=1$$

Prove that–

$$\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right]\cdot\left[\vec{a}'\,\vec{b}'\,\vec{c}'\right]=1$$

(iii) दिखाओ कि यदि

$$\vec{r}(t)=\begin{cases}2i-j+2k & \text{जब } t=2\\ 4i-2j+3k & \text{जब } t=3\end{cases}$$

तब $\int_2^3 \vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt=10$

Show that if

$$\vec{r}(t)=\begin{cases}2i-j+2k & \text{when } t=2\\ 4i-2j+3k & \text{when } t=3\end{cases}$$

then $\int_2^3 \vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt=10$.

(iv) किसी समय t पर एक कण का त्वरण $e^t i + e^{2t} j + k$ है। तो वेग v ज्ञात कीजिए, जबकि $v = i + j$ जहाँ $t = 0$।

The acceleration of a particle at time t is $e^t i + e^{2t} j + k$. Then find the velocity v, when $v = i + j$ where $t = 0$.

(v) निम्नलिखित वृतों की उभयनिष्ठ जीवा का समीकरण ज्ञात कीजिए-

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$$

Find the equation of common chord of following circles :

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$$

(vi) शांकव

$$\frac{l}{r} = 1 - e\cos\theta$$

की नियता का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of directrix of a conic $\frac{l}{r} = 1 - e\cos\theta$.

(vii) दर्शाइये कि उस शंकु का समीकरण जिसका शीर्ष मूल बिन्दु पर तथा जो समतल $lx + my + nz = p$ एवं पृष्ठ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के प्रतिच्छेद वक्र से होकर जाता है-

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = \left(\frac{lx + my + nz}{p}\right)^2$$

Show that the equation of the cone whose vertex is origin and which passes through the curve of intersection of the plane $lx + my + nz = p$ and the surface $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ is-

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = \left(\frac{lx + my + nz}{p}\right)^2$$

(viii) बेलन एवं लम्बवृतीय बेलन की परिभाषा लिखिए।

Write the definitions of cylinder and right circular cylinder.

(ix) बिन्दु (1, –1, 2) पर शांकवज $5x^2 - 4y^2 + 6z^2 = 25$ के स्पर्श तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the tangent plane to the conicoid $5x^2 - 4y^2 + 6z^2 = 25$ at the point (1, –1, 2).

(x) दर्शाइये कि समतल $x + 2y - 2z = 4$ परवलयज $3x^2 + 4y^2 = 24z$ को स्पर्श करता है।

Show that the plane $x + 2y - 2z = 4$ touch the paraboloid $3x^2 + 4y^2 = 24z$.

इकाई – I

(*Unit – I*)

2. सिद्ध कीजिए कि सदिश $\vec{a}\times(b\times\vec{c})$, $\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})$ एवं $\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$ समतलीय है। 6/7

Prove that the vector $\vec{a}\times(b\times\vec{c})$, $\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})$ and $\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$ are coplanar.

अथवा

(Or)

यदि $\vec{F} = (\vec{a}\times\vec{r})r^n$ हैं तो दर्शाइये कि

$$\nabla\times\vec{F} = (n+2)r^n\vec{a} - nr^{n-2}(\vec{a}\cdot\vec{r})r.$$

If $\vec{F} = (\vec{a}\times\vec{r})r^n$, then show that

$$\nabla\times\vec{F} = (n+2)r^n\vec{a} - nr^{n-2}(\vec{a}\cdot\vec{r})r.$$

इकाई – II

(*Unit – II*)

3. गॉस डाइवरजैन्स प्रमेय से सिद्ध कीजिए कि–

$$\int_s (axi + by\,j + cz\,k)\cdot\hat{n}\,ds = \frac{4}{3}\pi(a+b+c)$$

जहाँ S, गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का पृष्ठ है। 6/7

Using Gauss divergence theorem to prove that

$$\int_s (axi + by\,j + cz\,k)\cdot\hat{n}\,ds = \frac{4}{3}\pi(a+b+c)$$

Where S is the surface of the sphere

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

अथवा

(Or)

ग्रीन प्रमेय का उपयोग कर समाकल

$$\int_c [(y - \sin x)dx + \cos x\, dy]$$

का मान ज्ञात कीजिए जहाँ c रेखाओं $y = 0$,

$x = \pi / 2$, $y = \frac{2}{\pi}x$ से बना त्रिभुज है।

Find the value of integral

$$\int_c [(y - \sin x)dx + \cos x\, dy]$$

by use of Green's theorem where c is the triangle formed by lines

$y = 0$, $x = \pi / 2$, $y = \frac{2}{\pi}x$.

इकाई – III

(Unit – III)

4. निम्नलिखित शांकव का अनुरेखण कीजिए-

$$34x^2 + 24xy + 41y^2 + 48x + 14y - 108 = 0$$

तथा दिखाइये कि इसकी उत्केन्द्रता $\frac{1}{\sqrt{2}}$ है। 6/7

इकाई – V

(Unit – V)

6. शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के नियामक गोला का समीकरण ज्ञात कीजिए। 6/7

Find the equation of director sphere of the conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$.

अथवा

(Or)

वह प्रतिबंध ज्ञात करो जबकि समतल $lx + my + nz = 1$ परवलयज $x^2 + y^2 = 2z$ का एक स्पर्शतल है।

Find the condition when the plane $lx + my + nz = 1$ is a tangent plane to the paraboloid $x^2 + y^2 = 2z$.