

U - 339

B. Sc. (First Year)

EXAMINATION, March, 2018

MATHEMATICS

Paper - III

VECTOR ANALYSIS AND GEOMETRY

Time : Three Hours

Maximum Marks : 40 (For Regular Students)

Minimum Pass Marks : 14

Maximum Marks : 50 (For Private Students)

Minimum Pass Marks : 34%

नोट- सभी प्रश्न हल कीजिए। प्रश्न क्रमांक 1 अनिवार्य है।
प्रश्न क्रमांक 1 से 5 भाग हल कीजिए।
Attempt all questions. Question no. 1 is compulsory. Solve any five parts from question no. 1.

1. किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिये- $2 \times 5 / 3 \times 5$
Attempt any five questions-

- (i) उस समान्तर षटफलक का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी कोरें $a = 2i - 3j + k$,
 $b = i - 3j + 4k$ और $c = 2i - 5j + 3k$ ।

P.T.O.

(2)

U -

Find the volume of a parallelepiped whose edges are represented

$$a = 2i - 3j + k, b = i - 3j + 4k, c = 2i - 5j + 3k.$$

- (ii) सिद्ध करो कि-

$$a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 3$$

Prove that-

$$a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 3$$

- (iii) यदि $r = (t - t^2)i + 2t^2j - 3k$,

$\int r \cdot dt$ का मान ज्ञात कीजिए।

If $r = (t - t^2)i + 2t^2j - 3k$, then find

$\int r \cdot dt$.

- (iv) $\frac{d^2r}{dt^2} = -\mu^2 r$ का समाकलन ज्ञात कीजिए।

Integrate-

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\mu^2 r$$

- (v) निम्नलिखित समीकरण कौन से शंकु निरूपित करते हैं ? उनके केन्द्र तथा अनन्तस्पर्शियों के समीकरण ज्ञात कीजिए-

$$14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$$

Which conics are represented by the following curve? Find their centre and equation of asymptotes-

$$14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$$

(vi) शंकु $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ को नियता का समीकरण ज्ञात कीजिए।

To find the equation to the directrix of the conic-

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$$

(vii) उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष $(0, 0, 3)$ और आधार वक्र वृत्त $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ है।

Find the equation of the cone whose vertex is $(0, 0, 3)$ and base is the circle

$$x^2 + y^2 = 4, z = 0.$$

(viii) लम्बवृत्तीय शंकु की व्याख्या कीजिए।

Explain right circular cone.

(ix) ध्रुवीय रेखाओं की व्याख्या कीजिए।

Explain Polar lines.

(X) एक शंकु का अन्वालोपी शंकु की व्याख्या कीजिए।

Explain Enveloping cone to a conicoid.

इकाई - I

(Unit - I)

2. यदि a', b', c' क्रमशः सदिशों a, b, c के व्युत्क्रम सदिश हैं तो सिद्ध कीजिए

$$a' \times b' + b' \times c' + c' \times a' = \frac{a + b + c}{[abc]}, \quad \text{जहाँ}$$

सदिश a, b, c असमतलीय है। 6/7

If a', b', c' are reciprocal vectors of the vector a, b, c respectively, then prove that

$$a' \times b' + b' \times c' + c' \times a' = \frac{a + b + c}{[abc]},$$

Where vector a, b, c are non-coplanar.

अथवा

(Or)

सतह $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ के बिन्दु $(4, 0, 3)$ पर स्पर्श समतल व अभिलम्ब रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of tangent plane and normal line to the surface

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25 \text{ at the point } (4, 0, 3).$$

3. $\int_c F \cdot dr$ का मूल्यांकन कीजिए जहाँ
 $F = yzi + xj + xyk$ तथा वक्र c हेलिक्स
 $r = a \cos t i + b \sin t j + ct k$ का चाप है,
 जिसकी सीमायें $t = 0$ से $t = \frac{\pi}{2}$ तक हैं। 6/7
- Evaluate $\int_c F \cdot dr$, where
 $F = yzi + xj + xyk$ and c is the arc of the
 helix $r = a \cos t i + b \sin t j + ct k$ from
 $t = 0$ to $t = \frac{\pi}{2}$.

अथवा

(Or)

स्टोक्स प्रमेय का सत्यापन कीजिए जब
 $F = x^2 i + xy j$ जहाँ c, xy समतल में वर्ग की
 परिमाण है जिसकी भुजायें रेखाओं
 $x = 0, y = 0, x = a, y = a$ के अनुदिश हैं।
 Verify Stoke's theorem for the function
 $F = x^2 i + xy j$ integrated round the square
 in xy -plane whose sides are along the lines
 $x = 0, y = 0, x = a, y = a$.

P.T.O.

4. शकव $x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y = 0$ का
 अनुरक्षण कीजिए तथा इसकी नाभियों के निर्देशांक
 एवं इसकी उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए। 6/7
- Trace the conic
 $x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y = 0$ and find the
 coordinates of its foci and its eccentricity.

अथवा

(Or)

मिट्ट कीजिए कि दो शकव $\frac{l_1}{r} = 1 + e_1 \cos \theta$
 तथा $\frac{l_2}{r} = 1 + e_2 \cos(\theta - \alpha)$ एक दूसरे को स्पर्श
 करते हैं यदि-

$$l_1^2 (1 - e_2^2) + l_2^2 (1 - e_1^2) = 2l_1 l_2 (1 - e_1 e_2 \cos \alpha)$$

Show that the two conics $\frac{l_1}{r} = 1 + e_1 \cos \theta$

and $\frac{l_2}{r} = 1 + e_2 \cos(\theta - \alpha)$ will touch one
 another if

$$l_1^2 (1 - e_2^2) + l_2^2 (1 - e_1^2) = 2l_1 l_2 (1 - e_1 e_2 \cos \alpha)$$

इकाई - IV

(Unit - IV)

5. दर्शाइये कि $x + y + z = 0$,
 $ayz + bzx + cxy = 0$ द्वारा प्राप्त रेखाओं के
 बीच का कोण $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ है यदि $a + b + c = 0$ तथा
 $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ है यदि $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ । 6/7

Prove that the angle between the lines given
 by—

$$x + y + z = 0, ayz + bzx + cxy = 0 \text{ is } \left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{if } a + b + c = 0 \text{ but } \left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ if } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0.$$

अथवा

(Or)

सिद्ध कीजिए कि लम्ब वृत्तीय बेलन का समीकरण

$$\text{जिसका अक्ष } \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3} \text{ है तथा जो}$$

बिन्दु $(0, 0, 3)$ से गुजरता है.

$$10x^2 + 13y^2 + 5z^2 - 6yz - 12zx - 4xy - 36x - 18y \\ + 30z - 135 = 0$$

Prove that the equation of the right circular
 cylinder whose axis is $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$

and passes through $(0, 0, 3)$ is :

$$10x^2 + 13y^2 + 5z^2 - 6yz - 12zx - 4xy - 36x - 18y \\ + 30z - 135 = 0$$

इकाई - V

(Unit - V)

6. शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के बिन्दु
 (α, β, γ) पर स्पर्श समतल का समीकरण ज्ञात
 कीजिए। 6/7

To find equation of tangent plane at (α, β, γ)

to the conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$.

अथवा

(Or)

$$\text{सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्तज } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

शून्य वृत्तक गोले $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - b^2 + c^2$
 पर स्थित है।

Prove that the umbilics of the ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ lie on the sphere}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - b^2 + c^2.$$