

Roll No

B.Sc. II Year. Examination April 2023  
Mathematics (Major-I)  
(Abstract Algebra & Linear Algebra)

A-23227

Time: 3 Hours

Section-A (Very short Answer type question)

Max.M 70/ Min M 25

टीप - सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 02 अंक का है। (50 शब्द)  
Note - Attempt all questions. Each question carries 02 marks.

प्रश्न 1  $G = \{1, -1, i, -i\}$  एक गुणनात्मक समूह है तो  $o(-i)$  ज्ञात कीजिए।  
 $G = \{1, -1, i, -i\}$  is a multiplicative group then find  $o(-i)$ .

प्रश्न 2 सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक चक्रीय समूह आवेनी होता है।  
Prove that every cyclic group is an abelian.

प्रश्न 3 समाकारिता के अर्थ की परिभाषा लिखिए।  
Write the definition of Kernel of a Homomorphism.

प्रश्न 4 क्रमचय  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$  का प्रतिलोम ज्ञात करो।  
Find the inverse of permutation  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

प्रश्न 5 शून्य विभाजक सहित वलय की परिभाषा लिखिए।  
Write the definition of ring with zero divisions.

Section-B (Short Answer type questions)

टीप - सभी पाँच प्रश्न हल करें। प्रत्येक प्रश्न 06 अंक का है। (250 शब्द)  
Note - Attempt all five questions. Each question carries 06 marks.

(5x6=30)

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए कि दो उपसमूहों का सर्वनिष्ठ एक उपसमूह होता है।  
Prove that the intersection of two subgroups is a subgroup.

अथवा (OR)

यदि  $G$  एक समूह है तथा  $H, G$  का एक अरिक्त उपसमुच्चय है तो  $H, G$  का उपसमूह होगा यदि और केवल यदि  $a, b \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$  जैसे  $b^{-1}, b$  का  $G$  में प्रतिलोम है।

If  $G$  is a group and  $H$  is a non empty subset of  $G$  then  $H$  is a subgroup of  $G$  if only if  $a, b \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$  Where  $b^{-1}, b$  is inverse of  $b$  in  $G$

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए कि समान कोटि के दो चक्रीय समूह तुल्यकारी होते हैं।  
Prove that two cyclic group of same order are isomorphic.

अथवा (OR)

मानलो  $G$  एक समूह है तथा माना  $g, G$  का स्थिर अवयव है तब प्रतिचित्रण  $Tg: G \rightarrow G$  जो  $Tg(x) = gxg^{-1} \forall x \in G$  परिभाषित है,  $G$  का एक स्वकारिता है।

Let  $G$  is group and let  $g$  is a fixed element of  $G$  then mapping  $Tg: G \rightarrow G$  defined as  $Tg(x) = gxg^{-1} \forall x \in G$  is an automorphism of  $G$ .

प्रश्न 8. एक वलय  $R$  शून्य भाजक रहित है यदि और केवल यदि  $R$  में गुणन निरसन नियम सत्य है।  
A ring  $R$  has no proper zero divisors, if and only if the cancellation law of multiplication hold in  $R$ .

अथवा (OR)

Intersection of two subrings is a subring

Show that the vectors  $(2, 1, 4), (1, -1, 2), (3, 1 - 2)$  form a basis for  $R^3(R)$

प्रश्न 9

$\alpha, \beta, \gamma$  सदिश समष्टि  $V(F)$  के रेखिकत स्वतन्त्र सदिश हैं जहाँ  $F$  सदिश संख्याओं की एक क्षेत्र है तो सिद्ध कीजिए कि  $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$  रेखिकत स्वतन्त्र हैं।

$\alpha, \beta, \gamma$  are linearly independent vectors of  $V(F)$  where  $F$  is a field of complex numbers then show that  $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$  are linearly independent

प्रश्न 10

$T: V_3(R) \rightarrow V_2(R)$  नियम  $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_3)$  द्वारा परिभाषित कीजिए। यह एक रेखिक रूपांतरण है। Define a mapping  $T: V_3(R) \rightarrow V_2(R)$  by rule  $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_3)$ , show that this is a linear transformation.

अथवा (OR)

आव्यूह  $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$  के आइगेन मान एवं आइगेन सदिश ज्ञात कीजिए।

Find eigen values and eigen vectors of matrix.  $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

### Section-C (Long Answer type questions)

टीप - कोई दो प्रश्न हल करें। प्रत्येक प्रश्न 15 अंक का है। (500 शब्द)

Note:- Attempt any two questions. Each question carries 15 marks.

प्रश्न 11. समाकारिता का मूलभूत प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove fundamental theorem of homomorphism.

प्रश्न 12. कैली प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Cayley theorem.

प्रश्न 13. वलय  $R$  का अरिक्त उपसमुच्चय  $S, R$  का उपवलय होगा यदि और केवल यदि

$$(\S) a - b \in S \nmid a, b \in S \quad (\S\S) a, b \in S \nmid a, b \in S$$

A Non empty subset  $S$  of  $R$  is a subring of Ring  $R$  if and only if

$$(\S) a - b \in S \nmid a, b \in S \quad (\S\S) a, b \in S \nmid a, b \in S$$

प्रश्न 14. सदिश समष्टि  $V(F)$  के एक अरिक्त उपसमुच्चय  $W$  को  $V$  का एक उपसमष्टि होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त

$$\text{प्रतिबंध है } a, b \in F \text{ तथा } \alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$$

A Necessary and sufficient condition for a non empty subset  $W$  of a vector space  $V(F)$  to be a

vector sub space of  $V$  is.  $a, b \in F$  and  $\alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$

प्रश्न 15. दर्शाइये कि आव्यूह  $A$  विकर्णीय है।

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Show that the matrix  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$  is diagonalizable